

Cvičení 12

Kvíz: Pro lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ dané předpisem $f(A) = A - A^T$ rozhodněte, které vektory patří do jádra a které do obrazu.

(a) I_2 ,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Úloha 1. Rozhodněte, zda je zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, y - z, x - y)^T$$

izomorfismem $\mathbb{R}^3$ na sebe sama (tzv. automorfismem).

Úloha 2. Jak z matice $_{B_V}[f]_{B_U}$ poznáme, zda je zobrazení $f : U \rightarrow V$ prosté, resp. „na“?

Úloha 3. Najděte lineární zobrazení $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}^2$ takové, aby

$$f(g(f(\mathcal{P}^2))) = f(\mathcal{P}^2),$$

pokud lineární zobrazení $f : \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definujeme předpisem

$$f(ax^2 + bx + c) = (a + 2b + c, a + b - c, 2a + 3b)^T \quad (\text{pro } a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Úloha 4. Nalezněte matici A , která splňuje zároveň obě podmínky:

- $\text{Ker}(A) = \text{span}\{(1, -1, -1)^T, (1, 1, -3)^T\}$,
- $\text{Ker}(A^T) = \text{span}\{(1, 2, 4)^T, (0, 1, 1)^T\}$.

Úloha 5. Rozhodněte a zdůvodněte, která tvrzení jsou pravdivá:

- (a) V každém tělese charakteristiky 2 platí $(a + a)b = a(b + b)$.
- (b) Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matice stejné hodnoti. Pak A lze elementárními řádkovými úpravami převést na B .
- (c) V prostoru $\mathbb{R}^3$ existuje čtveřice nenulových vektorů $\{u, v, w, z\}$ taková, že $\{u, v, w\}$ je báze, ale žádná jiná trojce báze není.
- (d) Počet lineárních zobrazení mezi prostory $\mathbb{Z}_3^4 \rightarrow \mathbb{Z}_3^2$ je 3^8 .