

Kvízová otázka: Jak vypadá matice přechodu od báze b_1, b_2, b_3 k bázi b_2, b_1, b_3 ?

Odpověď: Je to matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (která je svým vlastním inverzem).

Poznámka: Často v lineární algebře používáme formulace typu „Vyjádřete lineární zobrazení jako matici vůči bázi $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ “. To je zneužití notace, protože {složené závorky} značí množinu, tedy **neuspořádanou** kolekci prvků. Jak ilustrujeme v kvízu, k získání matice lineárního zobrazení potřebujeme mít vektory báze **uspořádané**. Na příkladu $\{b_1, \dots, b_n\}$ to zrovna tolik nevádí, protože ty b_i jsou uspořádány očíslováním v dolním indexu, ale už v následující úloze bychom zcela správně měli psát místo složených závorek (kulaté), protože tak se značí uspořádaná n -tice.

Úloha 1. V prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme dvě báze

$$B_1 = \{(1, 1, 1)^T, (0, 1, -1)^T, (2, 0, 1)^T\}, \quad B_2 = \{(3, 2, 2)^T, (1, 0, 1)^T, (1, 2, 2)^T\}.$$

- (a) Sestrojte matici přechodu od báze B_1 do kanonické.
- (b) Sestrojte matici přechodu od kanonické báze do báze B_1 .
- (c) Určete souřadnice vektoru $(1, 2, 0)^T$ vzhledem k bázi B_1 .
- (d) Sestrojte matici přechodu od báze B_2 do báze B_1 .

Řešení a): To je zrovna jednoduché, protože víme, že má platit

$${}_{kan}[id]_{B_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad {}_{kan}[id]_{B_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad {}_{kan}[id]_{B_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

jinými slovy

$${}_{kan}[id]_{B_1} \cdot I = {}_{kan}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení b): Už známe ${}_{kan}[id]_{B_1}$. Stačí nám spočítat inverz ${}_{B_1}[id]_{kan} = {}_{kan}[id]_{B_1}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{array} \right)$$

Řešení c): Teď, když už máme spočítanou matici přechodu ${}_{B_1}[id]_{kan}$, stačí využít, že $[x]_{B_1} = {}_{B_1}[id]_{kan} \cdot [x]_{kan}$:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Řešení d): Opět to už máme de facto zadarmo:

$$\begin{aligned} {}_{B_1}[id]_{B_2} &= {}_{B_1}[id]_{kan} \cdot {}_{kan}[id]_{B_2} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Úloha 2. Uvažme lineární zobrazení $f : \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathcal{P}^2$ zadané

$${}_B[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázi $B = \{1, 1+x, x^2\}$. Najděte ${}_{B'}[f]_{B'}$, je-li $B' = \{1, x, 1+x^2\}$.

Řešení: *Původně jsem tu měl nesprávné řešení. Pardon. Dejte prosím vědět, pokud najdete další chyby.*

Roli kanonické báze v $\mathcal{P}^k$ může hrát $(k+1)$ -tice $\{1, x, x^2, \dots, x^k\}$.

Máme

$${}_{kan}[id]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}_{kan}[id]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice ${}_{B'}[id]_B$ a ${}_B[id]_{B'}$ získáme pomocí našeho oblíbeného triku $(A|B) \sim (I|A^{-1}B)$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme

$$\begin{aligned} {}_{B'}[f]_{B'} &= {}_{B'}[id]_B \cdot {}_B[f]_B \cdot {}_B[id]_{B'} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Úloha 3. Mějme lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$ dané maticí

$$F = {}_{kan}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

kde

$$B_U = \{(0, 1, 3)^T, (1, 2, 0)^T, (0, 3, 1)^T\}.$$

Rozhodněte:

- Je zobrazení „na“?
- Je zobrazení prosté?
- Kam se zobrazí vektor $(1, 1, 1)^T$ (zapsaný v kanonické bázi, tj. přímo tento vektor)?
- Nalezněte vektor (vůči kanonické bázi), který se zobrazí na $(2, 1, 2)^T$
- Nalezněte matici zobrazení f vzhledem ke kanonickým bázím.

Řešení: F je regulární matice, takže f je izomorfismus, a je tedy prosté i na. Bude se nám hodit rovnou vyřešit poslední podúlohu a najít ${}_{kan}[f]_{kan}$, na což se bude hodit ${}_{B_U}[id]_{kan} = {}_{kan}[id]_{B_U}^{-1}$ (už víme, jak sestavit ${}_{kan}[id]_{B_U}$). Při výpočtu inverzu jen nezapomeňme, že pracujeme nad $\mathbb{Z}_5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} {}_{kan}[f]_{kan} &= {}_{kan}[f]_{B_U} \cdot {}_{B_U}[id]_{kan} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vektor $(1, 1, 1)^T$ se proto zobrazí na

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Abychom zjistili, co je předobraz $(2, 1, 2)^T$, potřebujeme znovu použít gaussovku na nalezení inverzu (rovnou píšů výsledky):

$$\begin{aligned} f^{-1}(2, 1, 2) &= {}_{kan}[f^{-1}]_{kan} \cdot (2, 1, 2)^T = {}_{kan}[f]_{kan}^{-1} \cdot (2, 1, 2)^T \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Úloha 4. Vzpomeňme na vektorový prostor $\mathbb{R}^+$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi

$$\begin{aligned} x \oplus y &= xy \\ \alpha \odot x &= x^\alpha. \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda je logaritmus (funkce $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$) z tohoto prostoru do $\mathbb{R}$ (nad $\mathbb{R}$) lineární zobrazení (a jak by mohla vypadat matice takového zobrazení?).

Řešení: Ano, o lineární zobrazení jde!

$$\begin{aligned} \log(\alpha \odot x) &= \log x^\alpha = \alpha \cdot \log(x), \\ \log(x \oplus y) &= \log xy = \log x + \log y. \end{aligned}$$

Pracujeme s přirozeným logaritmem, zvolme báze $B_{\mathbb{R}^+} = \{e\}, B_{\mathbb{R}} = \{1\}$.
(Kdybychom pracovali s logaritmem $\log_k$ o základu k , za bázi $B_{\mathbb{R}^+}$ zvolme k , všechno ostatní je pak analogické.)

Protože $\log e^x = x$, platí, že $_{B_{\mathbb{R}}}[\log]_{B_{\mathbb{R}^+}} = (1)$.

Zkusme to ještě „otestovat“. Uvažme libovolné kladné číslo x , které také můžeme zapsat jako e^y (protože je kladné).

$$\log x = \log e^y = _{B_{\mathbb{R}}}[\log]_{B_{\mathbb{R}^+}}[x]_{B_{\mathbb{R}^+}} = (1) \cdot (y) = (y) = [y]_{B_{\mathbb{R}}}.$$

Skutečně jsme dostali souřadnice přirozeného logaritmu čísla x .

Úloha 5. Mějme lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ zadané maticovým předpisem $A = _{B_V}[f]_{B_U}$. Ukažte, že matice $\text{RREF}(A)$ reprezentuje stejné zobrazení, ale vzhledem k jiným bázím.

Řešení: Vztah mezi A a $\text{RREF}(A)$ dobře známe. Každá elementární řádková úprava odpovídá násobení zleva nějakou „elementární“ maticí:

$$\text{RREF}(A) = E \cdot A = E_k \dots E_1 \cdot A.$$

Elementární matice jsou přitom regulární, násobek regulárních matic je regulární, a každá regulární matice (třeba naše E) odpovídá nějaké matici přechodu (resp. nad $\mathbb{R}$ nekonečně mnoha maticím přechodu; každá báze se zobrazí na nějakou jinou).

Pokud cokoli z právě uvedeného není jasné, promyslete, proč to platí.

Odstupňovaný tvar lze obecně chápat jako

$$\text{RREF}(A) = E \cdot A = _{B_3}[id]_{B_2} \cdot _{B_2}[f]_{B_1} = _{B_3}[f]_{B_1}$$

Jde tedy o matici stejného zobrazení, která se liší jen výstupní bází.

Úloha 6. Nalezněte jádro a obraz lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ definovaného předpisem $A \mapsto A + A^T$.

Řešení: Jádro $\text{Ker } f$ je tvořeno těmi maticemi, které se zobrazí na matici nulovou. Jsou to právě, můžeme říct, antisymetrické matice, pro které $A_{ij} = -A_{ji} \ \forall i, j \in n$ (speciálně diagonála takových matic musí být nulová). $\text{Ker } f$ je $\frac{n(n-1)}{2}$ -dimenzionální podprostor prostoru $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Obraz $f(\mathbb{R}^{n \times n})$ tvoří zase všechny symetrické matice, má dimenzi $\frac{n(n+1)}{2}$ (tu musí mít i proto, že obecně dimenze vstupního prostoru lineárního zobrazení

odpovídá součtu dimenzí jádra a obrazu). Každou symetrickou matici A dostaneme jako vyhodnocení f v matici, která se v horním trojúhelníku shoduje s A a pod diagonálou má nuly.

Úloha 7. Uvažme dvě lineární zobrazení $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadaná maticemi

$${}_B[f]_{kan} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}_B[g]_{kan} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

kde $B = \{(1, 0, -1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, -2, 1)^T\}$. Určete ${}_{kan}[g \circ f]_{kan}$.

Řešení: Stačí doplnit ty správné matice přechodu:

$${}_{kan}[g \circ f]_{kan} = {}_{kan}[id]_B \cdot {}_B[g]_{kan} \cdot {}_{kan}[id]_B \cdot {}_B[f]_{kan},$$

přitom, jak už jsme několikrát viděli, nalézt ${}_{kan}[id]_B$ je snadné. Stačí vložit báze vektory do sloupců.

Dostaneme

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Úloha 8. Co je obrazem prostoru $\text{span}\{\sin x, \cos x\}$ při zobrazení maticí $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ od báze $\{\cos x - \sin x, \sin x\}$ k bázi $\{\cos x + \sin x, \cos x\}$?

Řešení: Matice nám říká:

$$\begin{aligned} f(\cos x - \sin x) &= 0 \cdot (\cos x + \sin x) + 1 \cdot \cos x = \cos x \\ f(\sin x) &= 0 \cdot (\cos x + \sin x) + 1 \cdot \cos x = 0. \end{aligned}$$

Dostáváme $f(\text{span}\{\sin x, \cos x\}) = \text{span}\{f(\sin x), f(\cos x)\}$, přičemž $f(\cos x) = f(\cos x - \sin x) - f(\sin x) = f(\cos x - \sin x) - 0$.

Jinak řečeno, obrazem je prostor $\text{span}\{0, \cos x\} = \text{span}\{\cos x\}$.

(Jádrem zobrazení je $\text{span}\{\sin x\}$.)

Úloha 9. Buď $f : U \rightarrow V$ lineární zobrazení a W *podprostor* $f(U)$. Dokažte, že tzv. úplný vzor

$$f^{-1}(W) = \{x \in U; f(x) \in W\}$$

je podprostor prostoru U .

Řešení: W je vektorový prostor, takže nutně $o \in W$, a z linearit f platí $f(o) = o$ (jinak bychom měli $f(x) = f(x + o) = f(x) + f(o) \neq f(x)$).

$f^{-1}(W)$ tedy obsahuje nulový vektor. Řekněme, že U a V jsou prostory nad tělesem T a uvažme libovolné $\alpha \in T$ a $x, y \in f^{-1}(W)$, tedy máme $f(x) = a \in W$, $f(y) = b \in W$.

W je vektorový prostor a $a + b$ i $\alpha \cdot a$ jsou prvky W . Z definice lineárního zobrazení dostáváme:

$$a + b = f(x) + f(y) = f(x + y)\alpha \cdot a = \alpha f(x) = f(\alpha x).$$

Množina $f^{-1}(W)$ tedy obsahuje o a je uzavřená na sčítání a skalární násobení. Je tudíž vektorovým podprostorem prostoru U .