

Kvízová otázka: Pro lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ dané předpisem $f(A) = A - A^T$ rozhodněte, které vektory patří do jádra a které do obrazu.

(a) I_2 ,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení: Můžeme rozmyslet, že pro $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ platí

$$f(A) = \begin{pmatrix} 0 & (b-c) \\ (c-b) & 0 \end{pmatrix},$$

takže každá matice z obrazu f musí být tvaru $\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$ (není nic speciálního na dimenzi 2×2 ; taková „antisymetrie“ platí pro obecné zobrazení $A \mapsto A - A^T$). Naráz je snadno vidět, že každá matice takového tvaru je obrazem nějaké matice.

Také můžeme rozmyslet, že z definice jádro tvoří právě symetrické matice.

Teď už snadno vidíme, že **a)** patří do jádra, ale ne do obrazu, **b)** do obojího, **c)** jen do jádra a **d)** jen do obrazu.

Úloha 1. Rozhodněte, zda je zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, y - z, x - y)^T$$

izomorfismem $\mathbb{R}^3$ na sebe sama (tzv. automorfismem).

Řešení: Z přednášek víme, že lineární zobrazení je izomorfismus právě tehdy když je jeho matice (vůči kterýmkoli bázím) regulární. V našem případě snadno ověříme, že to f nesplňuje:

$${}_{kan}[f]_{kan} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

takže f není automorfismus.

Úloha 2. Jak z matice ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ poznáme, zda je zobrazení $f : U \rightarrow V$ prosté, resp. „na“?

Řešení: f je prosté právě když $f(x) = 0$ jen pro nulové x . Jinými slovy, ${}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot v$ musí platit jen pro nulový vektor v . Ještě jinými slovy, ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ musí mít lineárně nezávislé sloupce.

Lineární zobrazení f je *na* právě když dimenze jeho obrazu je rovna dimenzi V (pak už nutně dostaneme celý prostor V jako obraz). Tím pádem je f *na* právě pokud $\text{rank}({}_{B_V}[f]_{B_U})$ je roven počtu řádků ${}_{B_V}[f]_{B_U}$, tj. počtu vektorů báze prostoru V . Jinými slovy, f je „*na*“ právě tehdy když ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ má lineárně nezávislé řádky.

Můžeme si ještě všimnout, že jsme znovu nahlédli, co už víme: že f je izomorfismus (prosté a *na* zároveň) právě když jeho matice je regulární.

Úloha 3. Najděte lineární zobrazení $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}^2$ takové, aby

$$f(g(f(\mathcal{P}^2))) = f(\mathcal{P}^2),$$

pokud lineární zobrazení $f : \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definujeme předpisem

$$f(ax^2 + bx + c) = (a + 2b + c, a + b - c, 2a + 3b)^T \quad (\text{pro } a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Řešení: Definujme bázi $B = \{x^2, x, 1\}$ prostoru $\mathcal{P}^2$ a označme jako K kanonickou bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Pak

$$A := {}_K[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chceme, aby funkce $f \circ g \circ f$ měla stejný obraz, jako f . Obraz f přitom odpovídá dvoudimenzionálnímu sloupcovému prostoru $\mathcal{S}({}_K[f]_B)$ generovaného např. prvními dvěma sloupcovými vektory (jak se za chvíli také přesvědčíme pomocí Gauss-Jordanovy eliminace). Chceme docílit toho, aby ${}_K[f \circ g \circ f]_B$ mělo stejný sloupcový prostor jako ${}_K[f]_B$. My přitom dokonce umíme docílit toho, aby se matice ${}_K[f]_B$ a ${}_K[f \circ g \circ f]_B$ shodovaly v prvních dvou sloupcích. Naše ${}_B[g]_K$ najdeme pomocí Gauss-Jordanovy eliminace:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) = (A' \mid {}_B[g]_K).$$

Tím jsme se nejen přesvědčili, že prostor $\mathcal{S}({}_K[f]_B)$ je generovaný prvními dvěma sloupci ${}_K[f]_B$ (protože první dva sloupce jsou báze), ale našli jsme

taky matici ${}_B[g]_K$ takovou, že ${}_B[g]_K \cdot A = A'$ a díky tvaru matice A' se ${}_K[f \circ g \circ f]_B = A \cdot {}_B[g]_K \cdot A = A \cdot A'$ v prvních dvou sloupcích shoduje s A .

Můžete ověřit, že matice ${}_K[f \circ g \circ f]_B$ má (stejně jako A) hodnotu 2 a její sloupcový prostor je generovaný prvními dvěma sloupci. Není to ale potřeba, protože násobek matice A obecně nemůže mít vyšší hodnotu než A .

Abychom neskončili jen u matice, zobrazení g můžeme taky dát předpisem

$$g(a, b, c) = (2b - a)x^2 + (a - b)x - a - b + c.$$

Úloha 4. Nalezněte matici A , která splňuje zároveň obě podmínky:

- $\text{Ker}(A) = \text{span}\{(1, -1, -1)^T, (1, 1, -3)^T\}$,
- $\text{Ker}(A^T) = \text{span}\{(1, 2, 4)^T, (0, 1, 1)^T\}$.

Řešení: Dostali jsme jádra definovaná dvěma lineárně nezávislými vektory (v obou případech, jinak by ani taková A rozměru 3×3 neexistovala). Budeme tak hledat $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ hodnoty 1. Jinými slovy, budou existovat takové vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$, že $A = u \cdot v^T$.

Co nám říká zadání je, že

$$v^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = v^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{a} \quad u^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = u^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

To jsou dvě soustavy dvou lineárních rovnic. Obě mají 1D množinu řešení (jak už jsme nahlédli nahoře, když jsme konstatovali lineární nezávislost zadaných vektorů). Náš úkol je jen vybrat nějaká nenulová řešení. Tak třeba

$$u := (-2, -1, 1)^T, \\ v := (2, 1, 1)^T,$$

což vede na matici

$$A = uv^T = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení 5. Rozhodněte a zdůvodněte, která tvrzení jsou pravdivá:

5a) „V každém tělese charakteristiky 2 platí $(a + a)b = a(b + b)$.“

To platí, protože $(a + a) = a(1 + 1) = a \cdot 0 = 0 = b \cdot 0 = b(1 + 1) = (b + b)$. Na obou stranách je nula.

5b) „Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matice stejné hodnoti. Pak A lze elementárními řádkovými úpravami převést na B .“

To nemusí platit. Např $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ jsou dvě matice hodnoti 1, ale řádkovými úpravami jednu z druhé nedostaneme, protože mají nenulové hodnoty v různých sloupcích.

Víme ale, že například dvě regulární matice stejné hodnoti (tedy stejných dimenzí $n \times n$) na sebe řádkovými úpravami převést jdou.

5c) „V prostoru $\mathbb{R}^3$ existuje čtveřice nenulových vektorů $\{u, v, w, z\}$ taková, že $\{u, v, w\}$ je báze, ale žádná jiná trojce báze není.“

Když jsou vektory nenulové, tak tohle neplatí, jak víme z lemmatu o výměně z přednášky.

5d) „Počet lineárních zobrazení mezi prostory $\mathbb{Z}_3^4 \rightarrow \mathbb{Z}_3^2$ je 3^8 .“

Ano, to platí. Víme, že lineární zobrazení odpovídají $1 : 1$ maticím zobrazení, a v našem případě půjde o matice typu $\mathbb{Z}_3^{2 \times 4}$, kterých je $3^{2 \cdot 4}$.